

Nejdříve uvedme potřebné definice:

Definice prostoru se skalárním součinem:

Prostorem se skalárním součinem rozumíme vektorový prostor H (nad $\mathbb{R}$ či nad $\mathbb{C}$), kde je pro každé prvky $x, y \in H$ je definován tzv. skalární součin $\langle x, y \rangle$ jako prvek $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$ tak že jsou splněny podmínky: $\forall x, y, z \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$(a) \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(b) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad (\overline{\lambda} \text{ značí konjugované komplex. číslo k číslu } \lambda \in \mathbb{C}).$$

$$(c) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle x, y \rangle.$$

$$(d) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Definice normy na prostoru H se skalárním součinem:

$$(*) \quad \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \text{pro každé } x \in H.$$

Cvičení. Ukážete, že funkce $\|\cdot\|$ definovaná předpisem $(*)$ splňuje vlastnosti normy:

$$(N1) \quad \forall x \in H: \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{a} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(N2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \text{ a } \forall x \in H: \\ \| \lambda \cdot x \| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

$$(N3) \quad \forall x, y \in H: \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

(Návod. Pro důkaz Hölderovy nerovnosti (N3) použijte tzv. Schwarzovu nerovnost:

$$\forall x, y \in H: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.)$$

Příklady. 1. $H = \mathbb{R}^n$, je-li $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in H$, pak definujeme sk. součin takto:

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

2. $H = \mathbb{C}^n$, pak je-li $x, y \in H$ a $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, potom definujeme sk. součin:

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}.$$

3. $H = l_2(\mathbb{R})$ eventuálně $H = l_2(\mathbb{C})$, kde

$$l_2(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{R} \text{ a } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

$$l_2(\mathbb{C}) = \left\{ \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{C} \text{ a } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

Pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $y = (y_1, \dots, y_i, \dots)$ z $l_2(\mathbb{R})$ definujeme:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i;$$

pokud je $x, y \in l_2(\mathbb{C})$, pak definujeme:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.$$

Cvičení: V příkladu proveďte, že $\langle x, y \rangle$ je skalární součin.
Součástí je i to, dokázat konvergenci řad $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ resp. $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$!

Věta (Jordan - von Neumann).

Mějme dan lineární prostor X spolu s normou $\|\cdot\|$ na X . Je-li splněno tzv. rovnoběžnické pravidlo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in X, \quad (RP)$$

pak existuje na X skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ který generuje normu $\|\cdot\|$ předpisem $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$, $\forall x \in X$.

Druhé, je-li $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ prostor se skalárním součinem, potom je funkce $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$, $\forall x \in X$ normou na X splňující vlastnost (RP).

Důkaz. Větu nelze dokázat. Jako cvičení ukažte, že je-li norma na lineárním prostoru generovaná skalárním součinem, pak splňuje rovnoběžnické pravidlo (RP). $\square$

Poznámka. Formule vyjadřující skalární součin pomocí normy splňující rovnoběžnické pravidlo pomocí tzv. polarizační formule uvádím níže v textu.

Cvičení: Ukážete, že je-li H prostor se skal. součinem, pak funkce $d: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in H$$

splňuje vlastnosti metricky:

$$(M1) \quad \forall x, y \in H: d(x, y) \geq 0 \quad \text{a} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$(M2) \quad \forall x, y \in H: d(x, y) = d(y, x).$$

$$(M3) \quad \forall x, y, z \in H: d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Definice úplného metrického prostoru:

Metrický prostor (M, d) se nazývá úplným prostorem, jestliže v něm každá Cauchyovská posloupnost konverguje. To znamená, že je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů prostoru M a

$$d(x_m, x_n) \rightarrow 0 \quad \text{pro} \quad m, n \rightarrow \infty,$$

pak ex. bod $\hat{x} \in M$ takový, že $x_n \rightarrow \hat{x}$ pro $n \rightarrow \infty$.

Definice separabilního metr. prostoru:

Řekneme, že metr. prostor (M, d) je separabilním prostorem,
když spočítavá podmnožina $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset M$
taková, že $\overline{X} = M$.

$\overline{X}$ je množina průniků všech v M uzavřených
podmnožin $Y \subset M$ takových, že $X \subset Y$.

Tvrzení: Všechny prostory z předchozího příkladu, tj.

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l_2(\mathbb{R}), l_2(\mathbb{C})$ jsou separabilními metrickými
prostory vzhledem k metrickám odvozeným od normy
na daném prostoru. (Norma je odvozena od sk. součinu
vztahem $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in H$.)

Definice Hilbertova prostoru:

Nechť H je prostor se skalárním součinem. Řekneme,
že H je Hilbertov prostorem, je-li H zároveň úplným
metrickým prostorem vzhledem k metrice d odvozené výše
množením způsobem od skalárního součinu.

Tvrzení: Prostory $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, l_2(\mathbb{R}), l_2(\mathbb{C})$ jsou příklady
separabilních Hilbertových prostorů.

Definice ortonormální soustavy:

Nechť H je Hilb. prostor a $X \subset H$. Řekneme, že X
tvoří ortonormální soustavu v prostoru H , jestliže:

(a) $\forall u, v \in X: \langle u, v \rangle = 0$;

(b) $\forall u \in X : \|u\| = 1$.

Definice ortonormalní báze :

Nechť H je Hilbertův prostor a $X \subset H$. Řekneme, že X tvoří ortonormalní bázi prostoru H , je-li v H maximální vůči inkluzi ortonormalní soustava prvků. (To znamená, že $X \cup \{u\}$ není ortonormalní soustavou prvků kdykoliv je $u \in H \setminus X$.)

Věta o existenci ortonormalní báze :

V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormalní báze.

Důkaz : provádět indukce. Jako poznámku je třeba říci, že důsledkem tzv. Zornova lemmatu a existence Zornova lemmatu je ekvivalence s tzv. axiomem výběru. Tedy důkaz je v obecném případě nekonstruktivní. V případě, kdy v H existuje spočetná a hustá podmnožina $\{x_n\} \subset X$, lze ortonormalní bázi získat tzv. Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem, tedy konstruktivně. $\square$

Definice lineárního obalu a uzavřeného lin. obalu :

Nechť W je vektorový prostor nad tělesem T a $A \subset W$. Lineárním obalem množiny A rozumíme lineární podprostor $\text{lin}(A)$ prostoru W , který je průnikem všech podprostorů obsahujících množinu A :

$$\text{lin}(A) = \bigcap_{A \subset Y, Y \subset W} Y.$$

($Y \subset W$ znamená, že Y je lin. podprostorem prostoru W .)
 Uzavřeným lineárním obalem $\overline{\text{lin}}(A)$ množiny A rozumíme
 průnik všech uzavřených podprostorů obsahujících
 A :

$$\overline{\text{lin}}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset Y, Y \subset W \\ \overline{Y} = Y}} Y.$$

Poznámka: Průh nad množinou značí tzv.

topologický uzavřený množinou. Tedy (M, d) metrický
 prostor a $Y \subset M$. Pak

$$\overline{Y} = \bigcap \{Z : Y \subset Z \text{ a } Z \text{ je v } M \text{ uzavřená množina}\}.$$

Cvičení. Necht' H je Hilb. prostor a $Y \subset H$.

Ukažte, že

$$\overline{\text{lin}}(Y) = \overline{(\text{lin}(Y))}.$$

Varování: Nepletěte si pojem ortonormální báze
 v Hilbertově prostoru s tzv. Hamelovou nebo
 lineární bází vektorového prostoru!

Platí totiž následující věta:

Věta: Závěra ortonormální báze Hilbertova prostoru
 nekonečné dimenze nemůže být jako Hamelova lin.
 báze.

Věta (o charakterizaci separabilních Hilbertových prostorů):

Hilbertův prostor je separabilní, právě když v něm existuje spočetná ortonormální báze.

Důkaz. Dokažme existenci spočetné ortonormální báze za předpokladu separability prostoru.

Nechť H je separabilní Hilbertův prostor. Sporem předpokládáme, že v H neexistuje nepočtená ortonormální báze $B = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset H$. Předpokládáme, že vždy musí existovat nějaká ortonormální báze prostoru H . Jsou-li

nyní e_α a $e_{\alpha'}$ dva různé prvky báze B , potom máme:

$$\|e_\alpha - e_{\alpha'}\| = \sqrt{\langle e_\alpha - e_{\alpha'}, e_\alpha - e_{\alpha'} \rangle} =$$
$$= \sqrt{\langle e_\alpha, e_\alpha \rangle + \langle e_{\alpha'}, e_{\alpha'} \rangle} = \sqrt{2}.$$

Nyní nechť $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset H$ tvoří spočetnou hustou podmnožinu v prostoru H . Dále lze snadno sestavit prosté zobrazení $\phi: B \rightarrow X$ takto: je-li $\alpha \in A$, pak exist $n_\alpha \in \mathbb{N}$ je takové, že $x_{n_\alpha} \in B(e_\alpha, \frac{1}{2})$. Poznamenejme, že existence elementu x_{n_α} s uvedenou vlastností plyne z hustoty množiny X . Nyní položíme $\phi(e_\alpha) = x_{n_\alpha}$.

Nyní se ukáže, že ϕ je prostým zobrazením, tj. $\forall e_\alpha, e_{\alpha'}, \alpha \neq \alpha': \phi(e_\alpha) \neq \phi(e_{\alpha'})$. Kdyby naopak platilo, že $\phi(e_\alpha) = \phi(e_{\alpha'})$, pak bychom měli:

$$x_{n_\alpha} = \phi(e_\alpha) \in B(e_\alpha; \frac{1}{2}) \text{ a } x_{n_{\alpha'}} = \phi(e_{\alpha'}) \in B(e_{\alpha'}; \frac{1}{2}).$$

$$\text{Potom } \|\phi(e_\alpha) - \phi(e_{\alpha'})\| = \|x_{n_\alpha} - x_{n_{\alpha'}}\| =$$

$$= \|(x_{n_\alpha} - e_\alpha) + (e_\alpha - e_{\alpha'}) + (e_{\alpha'} - x_{n_{\alpha'}})\| \geq$$

$$\geq \|e_\alpha - e_{\alpha'}\| - (\|x_{n_\alpha} - e_\alpha\| + \|e_{\alpha'} - x_{n_{\alpha'}}\|) >$$

$$> \sqrt{2} - 1 > 0 \Rightarrow 0 = \|\phi(e_\alpha) - \phi(e_{\alpha'})\| >$$

> 0 což je spor.

Tedy ϕ je prostě zobrazení odkud máme :

mohutnost množiny $B \leq$ mohutnost $\text{mn. } X$

$\Rightarrow$ B je spočetná množina a tak dostáváme spor a předpokladem, že B je nespočetná množina.

Důkaz opačné implikace použijeme naznačujeme.

Te-6: $B = \{e_n\}_{n=1}^\infty$ spočetnáortonormální báze,

patří je množina $X \subset X$ definovaná takto:

$$X = \{x \in H : x = \sum_{i=1}^{m_x} r_i \cdot e_{n_i}, m_x \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{Q}\}$$

a) spočetná;

b) $\overline{X} = H$. $\square$

Věta ^(A) (Charakterizace ortonormální báze v separabilním $\mathcal{H}$ prostoru.)

Nechť H je separabilní Hilbertův prostor a $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ je daná ortonormální soustava prvků. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(a) E je ortonormální báze prostoru H .

(b) $E^{\perp} = \{0\}$. ($E^{\perp}$ je ortogonální doplněk k E , tj.

$$E^{\perp} = \{x \in H : \forall e \in E : \langle x, e \rangle = 0\}.)$$

(c) $\overline{\text{lin}(E)} = H$.

(d) $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$

(Parsevalova rovnost.)

(e) $\forall x \in H : x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n$.

(f) $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot \overline{\langle y, e_n \rangle}$, $\forall x, y \in H$.

Důkaz. Neuvádím. $\square$

REPREZENTACE LIN. OMEZENÝCH OPERÁTORŮ $A : H \rightarrow H$ NA SEPARABILNÍM H. PROSTORU

Uvažujme separabilní H. prostor H a (spčetnou) ortonormální bázi $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukážeme
jistou reprezentaci lineárního operátoru

$$A : H \rightarrow H.$$

pomocí nekonečné matice.

Definice: $\eta = (X)_E := (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots)^T =$

$$= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \\ \vdots \end{pmatrix}; \quad \eta_i = \langle X, e_i \rangle, \quad i=1,2,\dots$$

$$\xi = (AX)_E := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)^T =$$
$$= \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \vdots \end{pmatrix}; \quad \xi_i = \langle AX, e_i \rangle, \quad i=1,2,3,\dots$$

Dále budeme pracovat s homomorfismem :

$$\mathcal{F}_E : \mathcal{H} \rightarrow l_2,$$

kde E je daná ortonormální báze a tedy definujeme

$$\forall x \in \mathcal{H} : \mathcal{F}_E(x) = \{\langle x, e_i \rangle\}_{i \in I} \in l_2.$$

Je-li $B = \{e_i\}_{i \in I}$ je daná ortonormální báze.

Toto je důležitá věta:

Věta (Riesz - Fischer)

Předpokládáme, že H je Hilbertův prostor (nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$) a nechť $E = \{e_i\}_{i \in I}$ je ortonormální báze na H .

Pak je zobrazení $\mathcal{F}_E$ izometrický izomorfismus Hilbertova prostoru H na prostor $l_2(I)$.

Definice. Uvažujme spojitý lineární operátor $A: H \rightarrow H$ na separabilním Hilbertově prostoru H a uvažme na prostoru H danou jistou ortonormální bázi $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($\dim H = \infty$). Potom čísla $A_k^n = \langle Ae_k, e_n \rangle$ určujeme maticovými elementy operátoru A (vzhledem k ortonormální bázi E).

Tvrzení: Za předpokladů uvedených v předchozí definici lze $\forall x \in H$ psát:

$$(Ax)_E = (A_k^n)_{k,n=1}^{\infty} \cdot (x)_E, \text{ tj. zapsáno}$$

v maticovém zápisu:

$$Ax = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = (A_k^n)_{k,n=1}^{\infty} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$(A_k^n)_{k,n=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^k & \dots \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^k & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & A_n^k & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Důkaz 2. Pro každé $x \in H$ platí:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ax, e_n \rangle \cdot e_n \quad , \quad \forall n: \xi_n = \langle Ax, e_n \rangle$$

$$\xi_n = \langle Ax, e_n \rangle = \left\langle A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \right), e_n \right\rangle =^{(1)}$$

$$= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot A e_k, e_n \right\rangle =^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \cdot \langle A e_k, e_n \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \cdot \langle x, e_k \rangle. \quad \text{Povšimněme si, že jsme v}$$

důkazu využili spojitost operátoru A (viz (1)) a také spojitost skalárního součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (viz (2)).

□

REPREZENTACE OMEZENÉHO LIN. OPERÁTORU VZHLÉDEM K JINÉ ORTONORMÁLNÍ BÁZI

Uvažujeme separabilní Hilbertův prostor H a na něm
máme dány dvě ortonormální (spčetné) báze:

$$E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \tilde{E} = \{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Pokud pracujeme s bází E , pak lze lib. prvek $x \in H$
jednoznačně vyjádřit ve tvaru:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \cdot e_n,$$

kde lze ukázat, že $\forall n \in \mathbb{N}: \eta_n = \langle x, e_n \rangle$.

Dále uvažujeme omezený a tedy spojitý lineární operátor:

$$A: H \rightarrow H.$$

Nyní lze opět $\forall x \in H$ prvek Ax jednoznačně vyjádřit
(vůči bází E) ve tvaru:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot e_n,$$

$$\text{kde } \xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \cdot \eta_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n \cdot \langle x, e_k \rangle. \quad (*)$$

Čísla A_k^n , $(n, k = 1, 2, \dots)$ nazveme maticovými elementy
operátoru A (vůči ortonormální bází E). Platí:

$$A_k^n = \langle Ae_k, e_n \rangle, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

Čísla A_k^n lze řadit do maticové matice $(A_k^n)_{n,k=1}^{\infty}$
(zde index n označuje číslo řádku a index k označuje
číslo sloupce.) Vypočít n -tého (Fourierova) koeficientu ξ_n
prvku Ax vůči bází E lze interpretovat jako součin
 n -tého řádku matice (A_k^n) a jednoslopcové (vektorevé)

matice $\eta := (x)_E := (\eta_1, \dots, \eta_k, \dots)^T =$
 $= (\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_k \rangle, \dots)^T.$

Lemma. Budiž H Hilbertov prostor a H_0 j uzavřený lin. podprostor v H a $H_0 \neq H$. Pak existuje $e \in H, x \neq 0$ takový že $\forall y \in H_0 : \langle e, y \rangle = 0$, (tj. $e \in H_0^\perp$.)

Důkaz. Zvolme $x \in H \setminus H_0 \neq \emptyset$ a položíme:

$$d = \text{dist}(x, H_0) = \inf \{ \|x - y\| : y \in H_0 \}.$$

Ukažme, že existuje $x_0 \in H_0$ tak, že $\|x - x_0\| = d$. Z definice víme, že plyne existence posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset H_0$ takové, že $\|x - y_n\| \rightarrow d$ pro $n \rightarrow \infty$ (dokažte!).

Nyní dokažme, že je tato posloupnost Cauchyovská, tj.

$$\|y_n - y_k\| \rightarrow 0 \text{ pro } n, k \rightarrow \infty.$$

Zvolme tedy libovolné $\varepsilon > 0$

$$u = x - y_n, v = x - y_k \Rightarrow u + v = 2x - (y_n + y_k) =$$

$$= 2 \left(x - \frac{y_n + y_k}{2} \right),$$

$$u - v = y_k - y_n,$$

$$4 \left\| x - \frac{y_n + y_k}{2} \right\|^2 + \|y_n - y_k\|^2 = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 =$$

$$= 2 \|u\|^2 + 2 \|v\|^2 = 2 \|x - y_n\|^2 + 2 \|x - y_k\|^2$$

$$\text{dále } \left\| x - \underbrace{\frac{y_n + y_k}{2}}_{\in H_0} \right\|^2 \geq d^2.$$

Z předchozích plyne $\forall n, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_k\|^2 &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_n + y_k}{2}\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - 4d^2 \end{aligned} \quad (*)$$

Nyní ukažme, že $N \in \mathbb{N}$ je tak velké, že $\forall n \geq N$ platí:

$$\|x - y_n\| < \sqrt{d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Je-li tedy $n, k \in \mathbb{N}$ a $n, k > N$, pak z (*) plyne, že

$$\begin{aligned} \|y_n - y_k\|^2 &< 2 \cdot \left(d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + 2 \left(d^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) - 4d^2 = \\ &= \varepsilon^2 \Rightarrow \|y_n - y_k\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy dokázali jsme, že posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská a tedy v důsledku úplnosti $\mathcal{H}$ prostoru H existuje $x_0 \in H$ takové, že $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Dále ukažme $\{y_n\} \subset H_0$, plyne z uzavřenosti podprostoru H_0 , že $x_0 \in H_0$. Pak, je snadné vidět, že $\|x - x_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$.

Konečně položíme $e = x - x_0$ a ukažme, že $e \in H_0^\perp$.

Poslední část doklazu provedeme sporem. Tudiž předpokládejme existenci prvku $y_0 \in H_0$ takového, že $\langle e, y_0 \rangle \neq 0$.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\|y_0\| = 1$.

Položíme nyní $\tilde{x}_0 := \langle e, y_0 \rangle \cdot y_0 \in H_0$. Odtud

$$\|\tilde{x}_0\| = |\langle e, y_0 \rangle| > 0.$$

$$\begin{aligned} \|x - (x_0 + \tilde{x}_0)\|^2 &= \|e - \langle e, y_0 \rangle \cdot y_0\|^2 = d^2 - \|\tilde{x}_0\|^2 \\ &< d^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x - (x_0 + \tilde{x}_0)\| < d, \text{ kde } x_0 + \tilde{x}_0 \in H_0.$$

Tedy dostali jsme spor s definicí dist a tak jsme dokázali, že $e = x - x_0 \in H_0^\perp$ a zároveň $e \neq 0$. $\square$

Poznámka. Bližším průzkumem dříve lemmatu zjistíme, že $\forall x \in H \setminus H_0$ dokonce existuje jediný prvek $x_0 \in H$ tak, že

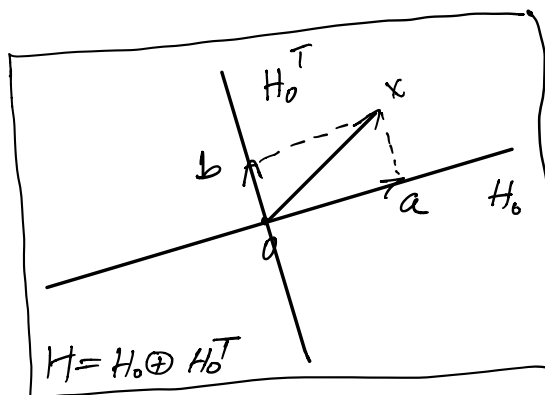
$$d = \text{dist}(x, H_0) := \inf \{ \|x - y\| : y \in H_0 \}.$$

Prvek x_0 nazýváme (ortogonální) projekcí prvku x na podprostor H_0 . Pokud položíme $H_0^\perp = \{ e \in H : \langle e, y \rangle = 0 \text{ pro všechna } y \in H_0 \}$, pak $x - x_0 \in H_0^\perp$, neboli

$x - x_0 \perp H_0$. Z uvedené ho vyplývá, že každý prvek $x \in H$ lze (jednoznačně) vyjádřit ve tvaru:

$$x = a + b, \text{ kde } a \in H_0, b \in H_0^\perp.$$

Tedy $H = H_0 \oplus H_0^\perp$, tj. Hilbertův prostor je direktním (dokonce topologickým direktním) součtem uz. podprostorů H_0 a $H_0^\perp$ ($H_0^\perp$ je uzavřeným lineárním podprostorem v H ! Dokažte!)



Cvičení: Dokažte si, že $H_0 \cap H_0^\perp = \{0\}$ a že $H_0^\perp$ je uzavřeným lin. podprostorem v H .
Pak odvoďte, že ortogonální rozklad $x = a + b \in H_0 + H_0^\perp$ je jednoznačný!

Je-li H_0 uz. podprostor Hilbertova prostoru H , ($H_0 \neq H$), pak lze uvažovat zobrazení $P_{H_0}: H \rightarrow H_0$ nazvané projekce na H_0 definované předpisem:

$P_{H_0}(x) \in H_0$ takže $d(x, H_0) = \|x - P_{H_0}(x)\|$.
 Pak můžeme $\forall x \in H_0: P_{H_0}(x) = x$. Dále pak $P_{H_0}^2 =$
 $= P_{H_0} \circ P_{H_0} = P_{H_0}$ a P_{H_0} je spojitá lineární zobrazení na H .
 (Zkuste si vše samostatně dokázat!)

Zajímavý je případ, kdy uvažujeme na prostoru H spojitou
 lineární formu $0 \neq l \in H^*$ a $H_0 = \text{Ker}(l) = \{x \in H: l(x) = 0\}$.

Pak i H_0 uvažujeme lin. prostorem a $H_0 \neq H$. V
 důsledku předchozího lemmatu u. $0 \neq e \in H_0^\perp$. Ukažme
 že pak $H_0^\perp = \text{lin} \{e\}$.

Pěsničji ukažme, že $H = H_0 \oplus \text{lin} \{e\}$, kde $0 \neq e \in H_0^\perp$.
 Stačí uvažovat $x \in H - H_0$. Pak $\bar{x} = x - \frac{l(x)}{l(e)} \cdot e \in H_0 \Rightarrow$
 $x \in H_0 + \text{lin} \{e\}$. Je-li $\text{lin} \{e\} \subset H_0^\perp$, pak nutně $H_0^\perp =$
 $= \text{lin} \{e\}$. $\square$

Rieszova věta o reprezentaci :

Nechť H je Hilbertov prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.
Pak pro každé $h \in H$ je zobrazení $l_h: H \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ def.
předpisem $l_h(x) = \langle x, h \rangle$ spojitou lineární formou na
prostoru H . Pokud $\|l_h\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |l_h(x)|$, pak $\|l_h\| = \|h\|$

Naopak, je-li $l: H \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ l.h. spojitá lineární forma,
pak ex. $h \in H$ tak, že $l = l_h$.

Důkaz. Je-li $h \in H$, pak z definice sk. součinu plyne
snadno lineární funkce l_h . Dále z Cauchyovy nerovnosti
pro každé $x \in H$: $|l_h(x)| = |\langle x, h \rangle| \leq \|x\| \cdot \|h\|$

$\Rightarrow \forall x \in H: \|x\| \leq 1 \Rightarrow |l_h(x)| \leq \|h\|$. Tedy

$\|l_h\| \leq \|h\|$. Je-li $h = 0$, pak zřejmě $\|l_h\| = \|h\| = 0$.

Pokud $h \neq 0$, pak $|l_h(\frac{h}{\|h\|})| = |\langle \frac{h}{\|h\|}, h \rangle| = \frac{1}{\|h\|} \cdot \|h\|^2 =$
 $= \|h\|$. Tedy plyne, že $\|l_h\| = \|h\|$.

Spojitosť lineární formy je opět důsledkem Cauchyovy
nerovnosti.

Konečně, pokud $l \in H^*$, tj. l je spojitá lineární forma na
prostoru H tak dokažeme existenci $h \in H$ tak, že $l = l_h$.

Pokud $l(x) = 0 \quad \forall x \in H$, potom je zřejmě $h = 0$. Předpokládejme
tedy, že $H_0 = \text{Ker}(l) \subsetneq H$. V důsledku předchozího

lemmatu existuje prvek $e \in H_0^\perp$, $\|e\| = 1$. Nyní položíme:

$$h := \overline{l(e)} \cdot e.$$

Nyní se snadno ukáže, že $\forall x \in H: l(x) = l_h(x)$. Stačí
také ukázat, že:

a) $l(e) = l_h(e) = \langle e, h \rangle$

b) $\forall x \in H: l(x) = l_h(x)$.

(Důvodůle proč je tento postup zajímavý!)

$$\begin{aligned} \text{a) } l_h(e) &= \langle e, h \rangle = \langle e, \overline{l(e)} \cdot e \rangle = l(e) \cdot \langle e, e \rangle = \\ &= l(e) \|e\|^2 = l(e) \quad (\text{předp. že } \|e\| = 1.) \end{aligned}$$

b) Je-li: $x \in H_0$, pak máme:

$$\begin{aligned} l_h(x) &= \langle x, h \rangle = \langle x, \overline{l(e)} \cdot e \rangle = l(e) \cdot \langle x, e \rangle = l(e) \cdot 0 = \\ &= 0 = l(x). \quad \square \end{aligned}$$

Poznámka. Označme-li symbolem H^* lineární prostor všech spojitých lineárních forem, pak funkce $\| \cdot \|_* : H \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem:

$$\|l\|_* = \sup_{\|x\|=1} |l(x)|$$

je normou na prostoru H . (Dokažte!)

Označme-li symbolem Φ zobrazení prostoru H^* na prostor H dle Rieszovy věty, tj. $\forall l \in H^*$:

$$\Phi(l) = h \Leftrightarrow l = l_h,$$

Je-li H Hilbertův prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, pak lze ukázat, že zobrazení je izometrický lineární izomorfismus prostoru H a H^* . Tedy je-li $l_1 \neq l_2$, pak $\Phi(l_1) \neq \Phi(l_2)$: totiž je stejně mohlo platit $\forall x \in H$: $l_1(x) = \langle x, \Phi(l_1) \rangle$ a $l_2(x) = \langle x, \Phi(l_2) \rangle$.

Tedy z podmínky $\Phi(l_1) = \Phi(l_2)$ plyne okamžitě, že $l_1 = l_2$.
 Zobrazení Φ je injektivní, což znamená, že $\forall x \in H$:

$$\|l\|_x = \|\Phi(l)\|.$$

Dále Φ je lineární, tj. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\forall l_1, l_2 \in H^*$:

$$\Phi(\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2) = \lambda_1 \Phi(l_1) + \lambda_2 \Phi(l_2).$$

(Dokažte!)

V případě, kdy je Hilbertův prostor navažovaný nad tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$, potom je zobrazení Φ tzv. sdružené lineární zobrazení. To znamená, že

$$(i) \forall l_1, l_2 \in H^*: \Phi(l_1 + l_2) = \Phi(l_1) + \Phi(l_2),$$

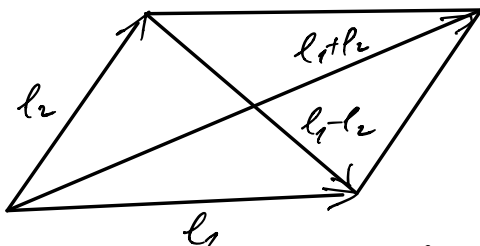
$$(ii) \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall l \in H^*: \Phi(\lambda \cdot l) = \overline{\lambda} \cdot \Phi(l). \quad (\overline{\lambda} \text{ je konjug. komplex. číslo k } \lambda.)$$

(Děle si zkusete dokázat!)

Cvičení (pro zvládněto úkoly):

Zkusete si dokázat, že splňuje norma $\|\cdot\|_x$ na dualním prostoru H^* tzv. parallelogramové pravidlo:

$$\forall l_1, l_2 \in H^*: \|l_1 + l_2\|_x^2 + \|l_1 - l_2\|_x^2 = 2(\|l_1\|_x^2 + \|l_2\|_x^2). \quad (*)$$



V případě, kdy také splňuje rovnoběžníkové pravidlo, pak je formulí:

$$\langle l_1, l_2 \rangle_x = \frac{1}{4} (\|l_1 + l_2\|_x^2 - \|l_1 - l_2\|_x^2), \quad l_1, l_2 \in H^*$$

definovanu skalární součin na H^* v reálném případě.
V komplexním případě má formule pro skalární
součin tvar:

$$\langle l_1, l_2 \rangle_* = \frac{1}{4} (\|l_1 + l_2\|_*^2 - \|l_1 - l_2\|_*^2 + i \|l_1 + il_2\|_*^2 - i \|l_1 - il_2\|_*^2)$$

$$l_1, l_2 \in H^*.$$

Děle pak žláste ukázat, že zobrazení Φ zachovává sk.
součin, to znamená:

$$\forall l_1, l_2 \in H^*: \langle l_1, l_2 \rangle_* = \langle \Phi(l_1), \Phi(l_2) \rangle.$$

(Zde $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ tedy označuje skalární součin na dualním
prostoru H^* a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označuje skalární součin na prostoru
 H .)

Definice adjungovaného operátoru:

Označme A^* tzv. adjungovaný operátor k operátoru A .
Ten se definuje následovně:

vektř $y \in H$ je zvolen lib., pak uvažujeme lineární
formu $l: H \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ definovanou předpisem:

$$l(x) = \langle Ax, y \rangle, \quad x \in H.$$

Nyní žijeme $l \in H^*$. Díky Rieszově o reprezentaci existuje
jediný prvek $h_y \in H$ takový, že pro každé $x \in H$ je

$$l(x) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, h_y \rangle.$$

Zobrazení $y \mapsto h_y$ nazýváme adjungovaným operátorem
a značíme symbolem A^* , $A^*: H \rightarrow H$ a

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad x, y \in H.$$

Cvičení: Ukážete, že $A^*: H \rightarrow H$ je spojité lineární operátor.

Cvičení. Ukážete, že jsou-li A_i^i maticové elementy operátoru A , pak A_i^j jsou maticové elementy adjungovaného operátoru A^* !

Problém. Předpokládáme, že máme maticové elementy A_k^i operátoru $A: H \rightarrow H$ na separabilním H. prostoru H vůči ortonormální bázi $E = \{e_n\}_{n=1}^\infty$. Najdeme pak maticové elementy $\tilde{A}_k^i$ vůči jiné ortonormální bázi $\tilde{E} = \{\tilde{e}_n\}_{n=1}^\infty$.

Rěšení: Z definice je $\forall n, k \in \mathbb{N}: \tilde{A}_k^i = \langle A \tilde{e}_k, \tilde{e}_i \rangle$.

Lemma: Necht' je H H. prostor, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ a $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ jsou dvě posloupnosti v prostoru H takové, že $x_n \rightarrow \tilde{x}$ a $y_n \rightarrow \tilde{y}$ v H pro $n \rightarrow \infty$. Pak $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$ pro $n \rightarrow \infty$.

Důkaz. $\forall n \in \mathbb{N}: |\langle x_n, y_n \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n\|$.

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle \tilde{x}, y_n \rangle + \langle \tilde{x}, y_n \rangle - \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle| \\ &= |\langle x_n - \tilde{x}, y_n \rangle + \langle \tilde{x}, y_n - \tilde{y} \rangle| \leq \underbrace{\|x_n - \tilde{x}\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\leq K} + \|\tilde{x}\| \|y_n - \tilde{y}\| \\ &\xrightarrow{\rightarrow 0} 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Vkresleme si, že jsme v předchozím dokazu užili.
tzn. Swartzova rovnost :

$$\forall x, y \in H : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Např. vyjádříme maticové elementy $\tilde{A}_k^m = \langle A\tilde{e}_k, \tilde{e}_m \rangle$ pomocí
maticových elementů $A_k^m = \langle Ae_k, e_m \rangle$ viz Věta A (7) !

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k^m &= \langle A\tilde{e}_k, \tilde{e}_m \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle A\tilde{e}_k, e_i \rangle \overline{\langle \tilde{e}_m, e_i \rangle} \\ \langle A\tilde{e}_k, e_i \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle \tilde{e}_k, e_j \rangle A(e_j), e_i \right\rangle \stackrel{\text{lineár.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \langle \tilde{e}_k, e_j \rangle \langle Ae_j, e_i \rangle \\ \Rightarrow \tilde{A}_k^m &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle \tilde{e}_k, e_j \rangle A_j^i \right) \overline{\langle \tilde{e}_m, e_i \rangle}. \quad \text{Tedy máme:} \end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{A}_k^m = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle \tilde{e}_k, e_j \rangle A_j^i \right) \overline{\langle \tilde{e}_m, e_i \rangle}} \quad (R_4)$$

Konečně rozměrná analógie :

Uvažujme nyní konečně dim. H -prostor H
(nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) a dále na prostoru H
uvažujme dvě (ortonormální) báze:
 $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$.

Definice matice přechodu:

Pro každé $l=1, \dots, n$ nechť

$$e_l = \sum_{k=1}^n \alpha_l^k \tilde{e}_k. \quad \text{Potom matrici}$$

$${}_{\tilde{E}}S_E = (\alpha_l^k)_{k,l=1}^n =$$

$$= \left((e_1)_{\tilde{E}} \ (e_2)_{\tilde{E}} \ \dots \ (e_n)_{\tilde{E}} \right)$$

nazveme maticí přechodu od báze E
k bázi $\tilde{E}$.

VĚTA: Uvažujme n -dimenzionální Hilb.
prostor H (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) a ortonormální
bázi $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Je-li $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ ortonormální
báze na prostoru H , pak je matice přechodu
 ${}_{\tilde{E}}S_E$ invertibilní (regulární) maticí a

platí:

$$\boxed{{}_E S_{\tilde{E}} = \tilde{E} S_E^{-1}}$$

Definice: Necht X je n -dimenzionální vekt. prostor (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) a $A: X \rightarrow X$ je lineární operátor. Dále necht $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ je lineární báze prostoru X . Matrici

$$(A)_E = (Ae_1)_E \ (Ae_2)_E \ \dots \ (Ae_n)_E$$

nazýváme matricí operátoru A vůči bázi E .

$$(A)_E \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{F}) =$$

= „prostor všech čtvercových matic

$n \times n$ nad $\mathbb{F}$ “

($\mathbb{F}$ je těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$).

Věta. Necht X je n -dimenzionální vekt. prostor, $A: X \rightarrow X$ necht je lineární operátor,
 $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ necht je lineární báze prost. X .

Paž pr kždě $u \in X$ platí:

$$(Au)_E = (A)_E \cdot (u)_E.$$

Důkaz. $u = \sum_{i=1}^m u^i \cdot v_i \Rightarrow$

$$Au = A \left(\sum_{i=1}^m u^i v_i \right) = \sum_{i=1}^m u^i A v_i$$

$$\Rightarrow (Au)_E = \sum_{i=1}^m u^i (A v_i)_E = (A)_E \cdot (u)_E.$$

□

Věta : Je-li H n -dimenzionální Hilb. prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$,

$A : H \rightarrow H$ je lineární operátor, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$

necht' je ortonormální báze prostoru H . Potom matice $(A)_E$ reprezentující operátor A tvar:

$$(A)_E = \begin{pmatrix} \langle Ae_1, e_1 \rangle & \langle Ae_1, e_2 \rangle & \dots & \langle Ae_1, e_n \rangle \\ \langle Ae_2, e_1 \rangle & \langle Ae_2, e_2 \rangle & \dots & \langle Ae_2, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Ae_n, e_1 \rangle & \langle Ae_n, e_2 \rangle & \dots & \langle Ae_n, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Tedy reprezentace lin. operátoru $A: H \rightarrow H$ pomocí matice $(A)_E$ vůči ortonormální bázi je v shodě s matice -

-dimenzionálnímu případem! Tož prvky matice $(A)_E$ jsou matricí elementy operátoru A vůči bazi E .

Definice (Reprezentace lin. operátoru vůči jiné bázi).

Necht' X je n -dimenzionální vekt. prostor (nad tělesem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$), $A: X \rightarrow X$ je lineární operátor. Dále uvažujeme dvě lineární báze $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ a $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ na X .

Pak platí:

$$\begin{aligned} (A)_{\tilde{E}} &= \tilde{S}_E \cdot (A)_E \cdot \tilde{S}_E^{-1} \\ &= \tilde{S}_E \cdot (A)_E \cdot S_{\tilde{E}} = \end{aligned}$$

Poznámka: Upravíme, že n řádkové vektor uvádíme
 řádky matic $(A)_E$ reprezentující operator A vůči bázi E
 a matici $(A)_{\tilde{E}}$ reprezentující operator A vůči jiné bázi $\tilde{E}$ bez
 ohledu na skalární součin na X . Tedy bez ohledu na to, jestli
 jsou báze E resp. $\tilde{E}$ ortonormální!

VĚTA (matice přechodu vůči ortonormálním bázím).

Nechť H je n -dimenzionální Hilbertův prostor nad tělesem
 $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Na prostoru H uvažujeme dvě ortonormální báze
 $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ a $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$. Pak pokud uvažujeme
 prostor H nad tělesem $\mathbb{R}$, potom platí:

$${}_{\tilde{E}}S_E = {}_E S_{\tilde{E}}^T.$$

V komplexním případě platí:

$${}_{\tilde{E}}S_E = \left(\overline{{}_E S_{\tilde{E}}} \right)^T,$$

kde $\overline{S}$ vznikne z matice S konjugováním každého
 prvku matice S , tj. $\overline{S} = (\overline{S_{ij}})_{i,j=1}^n$ pro matici $S =$
 $= (S_{ij})_{i,j=1}^n$.

Důkaz. Důkaz jednoduše plyne z toho, že obě matice
 přechodu mají tvar:

$${}_E S_{\tilde{E}} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{e}_1, e_1 \rangle & \langle \tilde{e}_2, e_1 \rangle & \dots & \langle \tilde{e}_n, e_1 \rangle \\ \langle \tilde{e}_1, e_2 \rangle & \langle \tilde{e}_2, e_2 \rangle & \dots & \langle \tilde{e}_n, e_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \tilde{e}_1, e_n \rangle & \langle \tilde{e}_2, e_n \rangle & \dots & \langle \tilde{e}_n, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

$${}_{\tilde{E}}^{\sim} S_E = \begin{pmatrix} \langle e_1, \tilde{e}_1 \rangle & \langle e_2, \tilde{e}_1 \rangle & \dots & \langle e_n, \tilde{e}_1 \rangle \\ \langle e_1, \tilde{e}_2 \rangle & \langle e_2, \tilde{e}_2 \rangle & \dots & \langle e_n, \tilde{e}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_1, \tilde{e}_n \rangle & \langle e_2, \tilde{e}_n \rangle & \dots & \langle e_n, \tilde{e}_n \rangle \end{pmatrix},$$

□

VĚTA. Necht' H je n -dimenzionální Hilbertův prostor nad
 tělem $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, $A: H \rightarrow H$ necht' je lineární operátor.
 Dále na prostoru H uvádíme dvě ortonormální báze $E =$
 $= \{e_1, \dots, e_n\}$ a $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$. Potom matice
 reprezentující operátor A vůči bázím E resp. $\tilde{E}$ platí:

$$(A)_{\tilde{E}}^{\sim} = {}_{\tilde{E}}^{\sim} S_E \cdot (A)_E \cdot S_{\tilde{E}}^{\sim},$$

přičemž jsou-li $\tilde{A}_l^k$ prvky matice $(A)_{\tilde{E}}^{\sim}$ a A_l^k jsou
 prvky matice $(A)_E$, platí pro ni v reálném případě

$$\text{vzorec: } \tilde{A}_l^k = \sum_{i=1}^n \tilde{e}_k^i \left(\sum_{j=1}^n A_j^i \tilde{e}_l^j \right). \quad (R_n)$$

Zde $\tilde{e}_k^i$ resp. $\tilde{e}_l^j$ označují i -tou souřadnici vektoru
 $\tilde{e}_k$ vůči báz. $\tilde{E}$ resp. j -tou souřadnici vektoru $\tilde{e}_l$ vůči
 báz. $\tilde{E}$. Tedy $\forall i: \tilde{e}_k^i = \langle \tilde{e}_k, e_i \rangle$ a $\forall j: \tilde{e}_l^j =$
 $= \langle \tilde{e}_l, e_j \rangle$.

V komplexním případě má vzorec (R_n) tvar:

$$\tilde{A}_l^k = \sum_{i=1}^n \overline{\tilde{e}_k^i} \left(\sum_{j=1}^n A_j^i \tilde{e}_l^j \right). \quad (R_n^{\mathbb{C}})$$

Důkaz. Je-li M matice $n \times n$, poť k, l budeme symbolem $\check{\kappa}_k(M)$ mít k-tý řádkový vektor a symbolem $sl_l(M)$ budeme mít j-tý sloupcový vektor matice M .

Jsou-li $M, N \in \text{Mat}(n \times n)$, poť

$$(M \cdot N)_l^k = \check{\kappa}_k(M) \cdot sl_l(N),$$

kde $(M \cdot N)_l^k$ značí prvek součinu $M \cdot N$ stojící v k -tém řádku a l -tém sloupci.

Provedeme důkaz pro reálný případ. V komplexním případě je důkaz analogický. Z předchozí věty již víme, že platí:

$$(A)_{\tilde{E}}^{\tilde{N}} = \tilde{S}_{\tilde{E}} \cdot (A)_E \cdot S_{\tilde{E}}.$$

$$\text{Dále víme, že } \tilde{S}_{\tilde{E}} = S_{\tilde{E}}^T. \text{ Dále } \tilde{A}_l^k = \langle A \tilde{e}_l, \tilde{e}_k \rangle = \\ = ((A)_{\tilde{E}}^{\tilde{N}})_l^k = \check{\kappa}_k(S_{\tilde{E}}) \cdot sl_l((A)_E \cdot S_{\tilde{E}}).$$

$$\text{Platí: } \check{\kappa}_k(S_{\tilde{E}}) = \check{\kappa}_k(S_{\tilde{E}}^T) =$$

$$= (\tilde{e}_k^1, \dots, \tilde{e}_k^n) = (\langle \tilde{e}_k, e_1 \rangle, \dots, \langle \tilde{e}_k, e_n \rangle).$$

$$sl_l((A)_{\tilde{E}} \cdot S_{\tilde{E}}) = (A)_E \cdot sl_l(S_{\tilde{E}}) = (A)_E \cdot \begin{pmatrix} \tilde{e}_l^1 \\ \tilde{e}_l^2 \\ \vdots \\ \tilde{e}_l^n \end{pmatrix} = \\ = (A)_E \cdot \begin{pmatrix} \langle \tilde{e}_l, e_1 \rangle \\ \langle \tilde{e}_l, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \tilde{e}_l, e_n \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \text{sl}_j((A)_E) \cdot \tilde{e}_l^j. \quad \text{total value:}$$

$$\tilde{A}_l^k = \chi_k(S_E) \cdot \text{sl}_l((A)_E, S_E) =$$

$$= (\tilde{e}_k^1, \dots, \tilde{e}_k^n) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \text{sl}_j((A)_E) \cdot \tilde{e}_l^j \right) =$$

$\uparrow$
 skalarer lösung

$$= \sum_{j=1}^n \tilde{e}_l^j \left((\tilde{e}_k^1, \dots, \tilde{e}_k^n) \cdot \text{sl}_j((A)_E) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \tilde{e}_l^j \left(\sum_{i=1}^n \tilde{e}_k^i \cdot A_j^i \right) = \sum_{i=1}^n \tilde{e}_k^i \left(\sum_{j=1}^n A_j^i \cdot \tilde{e}_l^j \right).$$

□